# El problema dels ponts de Köningsberg. Idees per a l'aula

**Mireia López Beltran**
Universitat Pompeu Fabra
i ICE Universitat Politècnica de Catalunya
mireia.lopez@gmail.com

**Pura Fornals Sánchez**
INS Francesc Macià de Cornellà de Llobregat
pfornals@gmail.com

## Resum

Aprofitem el problema dels ponts de Köningsberg per plantejar a l'alumnat una situació contextualitzada que ens permet treballar diferents aspectes, curriculars o no, de les matemàtiques. A més, seguint directament el fil històric del problema es pot veure com d'una situació prou senzilla es poden deduir grans resultats matemàtics que ens permeten introduir altres aspectes amb més facilitat.
La introducció, per part d'Euler, d'un sistema de notació que permet simplificar el plantejament i la resolució del problema dels ponts (començant per un problema més senzill, obrint la possibilitat de noves formes de representació...) facilita la comprensió de la situació per part de l'alumnat i li obre l'oportunitat d'atrevir-se a resoldre altres situacions similars, amb la satisfacció personal que això suposa.
D'altra banda, la introducció de la notació matricial i de les operacions amb matrius, sobretot el producte, suposa una dificultat afegida a l'alumnat. Amb aquest plantejament, aconseguim que augmenti el seu interès i, per tant, la millora dels resultats.
El fer servir la teoria de grafs no comporta cap complicació afegida, ans al contrari, l'alumnat ho veu com una manera pràctica de representar situacions reals que en facilita la lectura i la interpretació posteriors. Per tant, tot i no ser curricular a secundària, és una bona eina a introduir.

## Abstract

*We take the problem of the Bridges of Koningsberg to present to students a contextual situation that allows us to work on different aspects, curricular or not, of mathematics. Also, following on directly from the historical problem, it can be seen how, from a quite simple situation, major mathematical results that allow us to introduce other aspects more easily can be deduced.*
*The introduction, by Euler, of a notation system that makes it possible to simplify and solve the problem of the Bridges (starting with an easier problem, opening up the possibility of new forms of representation...) facilitates understanding by students of the situation and gives them the opportunity to dare to solve other similar situations, achieving personal satisfaction.*
*Furthermore, the introduction of matrix notation and matrix operations, especially the product, gives an added difficulty for students. With this approach, we managed to increase their interest and thus improve the results.*
*The use of graph theory involves no further complication; on the contrary, students see it as a practical way to represent real situations facilitating subsequent reading and interpretation. Therefore, although not part of the high school curriculum, it is a good tool to introduce.*

## Introducció

Proposar als nostres alumnes la resolució de situacions en contextos rics i significatius és un dels reptes que tenim els professors de les diferents etapes educatives. El problema dels ponts de Köningsberg és una situació molt rica, ja que ens permet treballar una gran diversitat d'aspectes:

1. El context històric real.
2. La resolució històrica.
3. Generalitzem?
4. Dibuixos d'un sol traç.
5. Els grafs.
6. El producte de matrius.

## 1. El context històric real

El problema dels ponts de Köninsberg ens permet portar a l'aula un problema real sense haver de simplificar l'enunciat original. Això fa que els alumnes percebin, per una banda la matemàtica com una eina que serveix per a donar resposta a situacions plantejades en la vida quotidiana, i per una altra banda que vegin la matemàtica com una àrea de coneixement que es va creant a partir de resoldre situacions concretes. També hi podem afegir la vessant humana i presentar el matemàtic que hi ha darrere dels raonaments i dels càlculs. Ara que tenim els ordinadors i els projectors a l'aula, és relativament senzill mostrar els diferents matemàtics anant directament a la seva biografia. Així podem mostrar-ne la imatge, parlar del lloc on va néixer i de l'època en què va viure.

En el guardonat article «The truth about Köningsberg», Hopkins i Wilson (2004) ens expliquen no se sap del cert com li va arribar a Euler aquest problema, però s'ha trobat correspondència amb Carl Leonhard Gottlieb Ehler, alcalde de Danzig, antiga Prússia (actual Gdansk a Polònia), a 130 quilòmetres de Konigsberg, on parlaven del problema dels ponts.

### *Enunciat del problema*

A continuació donem l'enunciat que Euler mateix va escriure en una carta datada el 13 de març de 1736:

> M'han plantejat un problema sobre una illa a la ciutat de Köningsberg, envoltada per un riu travessat per set ponts, i em van preguntar si algú podia travessar els ponts separats en un passeig de manera que cada pont es travessi només una vegada (Hopkins i Wilson, 2004).

I a més afegeix que ha estat informat que encara ningú l'ha demostrat ni ha mostrat que això no és possible. Per a Euler aquest problema era «banal», però li crida l'atenció, ja que veu que en la seva resolució necessita noves tècniques i en especial creu que pot ser un problema que pertanyi a la *geometria de la posició* que havia introduït Leibniz.

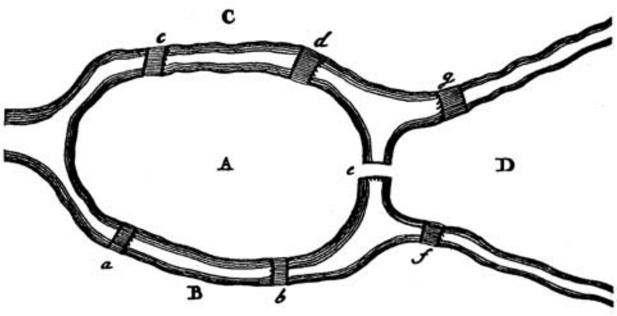


**Fig. 1**[1]

## 2. La resolució històrica

Un dels interessos didàctics d'aquest problema és el fet que s'ha de demostrar que el camí buscat no existeix. No és gaire habitual que en les nostres classes plantegem als alumnes problemes en què hagin de provar que alguna cosa no és possible. En aquesta proposta resseguirem la resolució històrica que proposa Euler.[2]

> Tot el meu mètode es basa en la forma particularment convenient en què l'encreuament del pont es pot representar. Per això, utilitzo les lletres majúscules A, B, C, D[3] per a cadascuna de les regions de terra separades pel riu. Si un viatger va des de A fins a B pel pont *a* o *b*, ho escric AB —on la primera lletra representa la regió que el viatger està deixant i la segona lletra, la regió on arriba després de creuar el pont.
>
> (...) ABDC, que s'ha de prendre en el sentit que el viatger, començant en A, travessa a B, va a D, i finalment arriba a C (Biggs *et al.*, 1986, p. 4).

D'aquesta manera, argumenta que si el passeig ha de passar per cada un dels set ponts una i només una vegada, aleshores la ruta pot ser representada per vuit lletres, de manera que «les lletres A i B estan l'una al costat de l'altra dues vegades, ja que hi ha dos ponts, *a* i *b*, connectant les regions A i B».

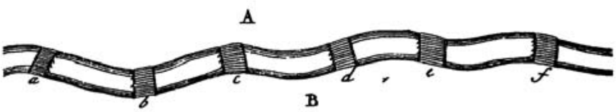


**Fig. 2**

Per intentar trobar si existeix una seqüència de vuit lletres que compleixi els requisits de lletres adjacents apropiats, redueix el problema a estudiar una sola regió A, amb un nombre indeterminat de ponts (fig. 2). Primer estudia la situació amb un pont, després amb tres

1. Imatge extreta de Hopkins i Wilson, 1986.
2. En la URL de Euler, 1736 podeu trobar la versió original en llatí. En Hopkins i Wilson, 1986, també en digital, podeu trobar un resum en anglès força detallat del procés del treball d'Euler. En Biggs *et al.*, 1986, 3-8, podeu trobar la traducció del treball a l'anglès.
3. Vegeu Fig. 1.

ponts, per concloure que si el nombre de ponts és imparell, aleshores el nombre de lletres A que hi ha d'haver a la seqüència seria la meitat d'aquest nombre de ponts més un.

Notem que Euler no fa servir cap llenguatge algebraic en aquesta argumentació, que es podria reduir a: si tenim un nombre de ponts *k* imparell, aleshores la lletra ha d'aparèixer $\frac{k+1}{2}$ vegades.

Com que en el nostre problema el nombre de ponts que arriba a cada regió és imparell, no ens cal ampliar l'estudi. Com que a la regió A hi arriben 5 ponts, aleshores la lletra A ha de sortir tres vegades i com que a les regions B, C i D hi arriben tres ponts a totes tres, aleshores cadascuna d'aquestes tres lletres ha de sortir dues vegades. En total, nou, i «això no pot ser en una seqüència de vuit lletres». D'aquesta manera, conclou que el passeig demanat no es pot fer a través dels set ponts de Köningsberg.

Fins i tot més endavant en el text, recull aquesta informació en una taula:

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

| | *Pontes* | |
|---|---|---|
| A, | 5 | 3 |
| B, | 3 | 2 |
| C, | 3 | 2 |
| D, | 3 | 2 |

**Fig. 3. Euler, 1736.**

En una carta datada el 3 d'abril de 1736, Euler exposa que «com que aquest tipus de solució té poca relació amb les matemàtiques, no entenc per què esperes un matemàtic per a realitzar-la, més que qualsevol, ja que la solució està basada només en la raó, i el seu descobriment no depèn de cap principi matemàtic» (Hopkins i Wilson, 1986).

Potser aquesta sensació de poca matemàtica és el que el va portar a plantejar-se i resoldre el problema general.

## 3. Generalitzem?

El text d'Euler està organitzat en paràgrafs numerats. A partir del desè paràgraf, comença el raonament per al cas general i per això en primer lloc necessita continuar l'anàlisi entre els ponts i el nombre de vegades que surt una lletra a la seqüència, però ara ampliant a un nombre de ponts parell.

Per anar il·lustrant el mètode general, proposa un altre exemple amb més elements que el dels set ponts de Köningsberg, concretament amb 7 regions i 15 ponts:

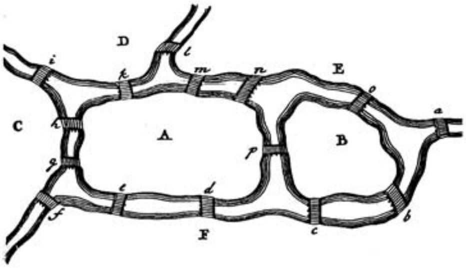


**Fig. 4**

Aquest pas a generalitzar també és una eina didàctica molt potent que, en aquest cas, sorgeix del mateix text històric de l'autor.

## 4. Dibuixos d'un sol traç

No podem oblidar mencionar la relació d'aquest problema amb els dibuixos d'un sol traç (fig. 5).

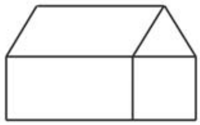

**Fig. 5**

A partir de repassar el treball original d'Euler, no podem deixar de fer notar que no hi ha cap referència al concepte de graf. Cap de les seves representacions (fig. 1, 2 i 4) és propera a la pròpia dels grafs. No obstant això, l'atribució a Euler de l'autoria del concepte és àmpliament acceptada. A més, el text amb la resolució del problema dels ponts de Köningsberg es considera que «involucra la formulació de diversos dels conceptes bàsics de la teoria de grafs» (Biggs *et al.*, 1986). Sense aquest problema, els orígens dels grafs només es podrien relacionar amb divertiments infantils com el presentat en aquest apartat.

## 5. Els grafs

El concepte de graf no és curricular a secundària, però, tal com indica Castrillón (2009), les seves idees poden ser treballades amb alumnes d'aquest grau. L'autor, a més, destaca que les idees que envolten el concepte de graf són senzilles, sense que això ni de lluny signifiqui pobresa en els continguts.

En Fornals i López, 2013 es descriu amb detall el treball que les autores portem a terme dins del projecte Estalmat[4] en les dues sessions que es duen a terme amb els alumnes de segon any. En la primera sessió es treballa la introducció al concepte de graf a partir de la

4. www.estalmat.org

presentació del diagrama de vols de la companyia Vueling. També es presenta, a partir d'exercicis concrets, un vocabulari mínim sobre grafs.

En la segona sessió es comença amb una discussió sobre els dibuixos d'un sol traç i les característiques que fan possible que aquest requeriment es pugui complir o no. Aquest escalfament serveix per a treballar després el problema dels ponts de Köningsberg. Amb els alumnes es treballa la resolució històrica que s'ha presentat a l'apartat 2.

L'objectiu de les sessions és treballar amb grafs en aquelles situacions en què aquesta eina matemàtica ens pot ajudar a resoldre-les. Una de les situacions, que creiem que és molt enriquidora, és donar un context al producte de matrius tal com presentarem en l'apartat següent.

## 6. El producte de matrius

Després de presentar el problema dels ponts de Köningsberg i introduir la resolució històrica d'Euler, s'insta els alumnes a reflexionar sobre el comentari: «Tot el meu mètode es basa en la forma particularment convenient en què l'encreuament del pont es pot representar». Després de la introducció dels grafs a la sessió anterior, es demana als alumnes que representin la situació del problema mitjançant un graf que els ajudi a seguir el raonament d'Euler.

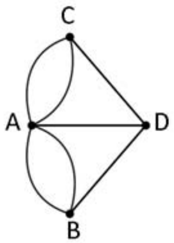


**Fig. 6. Graf problema dels ponts de Köningsberg.**

Aquesta tasca no comporta gaires problemes per als alumnes més enllà d'adonar-se que no hi ha un únic graf correcte. La majoria dels grafs que dibuixen són com el mostrat a la figura 6. No acostumen a incorporar-hi els noms dels ponts. Si es fes, ens quedaria el graf següent:

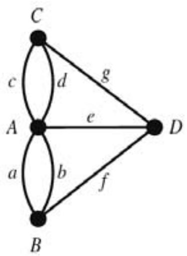


**Fig. 7**

Un cop acabada la resolució del problema, es demana que comptin de quantes maneres diferents podem anar de la regió C a la regió D passant exactament per dos ponts. Els alumnes troben les dues possibilitats i les representem amb un diagrama semblant al següent:

$$C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{e} D$$
$$C \xrightarrow{d} A \xrightarrow{e} D$$

**Fig. 8**

Tot seguit, introduïm el concepte de matriu associada a un graf a partir d'un exemple i els demanem que escriguin la matriu associada al graf que ells han dibuixat. Sense gaires dificultats, troben que la matriu demanada és:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuació, calculem $M^2$ i l'anomenem $N$. Tenim que $M^2 = N = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Abans ja els hem definit producte de matrius.

I ara els demanem si poden trobar una interpretació del terme $n_{34} = 2$ que han trobat a partir de calcular:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Fig. 9**

$$n_{34} : 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

**Fig. 10**

Notem que són els camins de segon ordre (passant per dos ponts) per anar de C a D, és a dir:

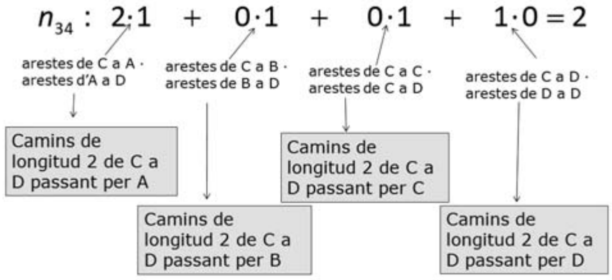


**Fig. 11**[5]

5. Interpretació basada en la trobada a Ticó, 2000.

Per consolidar el concepte, es pot escollir un altre element, com per exemple $n_{14}$:

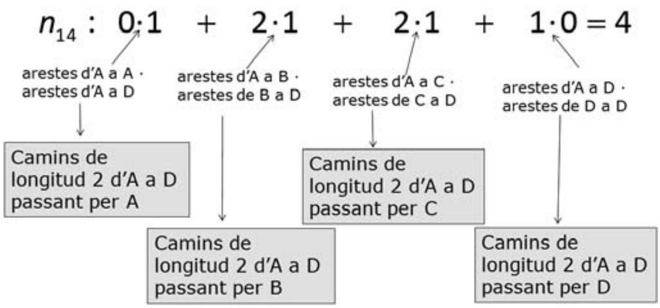


**Fig. 12**

També es pot plantejar al revés, tal com ho fem a Estalmat (Fornals i López, 2013). Partint d'una matriu inicial referida a vols entre diferents ciutats, els fem calcular la quantitat de maneres que hi ha per fer cada recorregut amb dos vols (una escala) i així troben els valors de la matriu al quadrat sense saber-ho. Després intenten deduir quines operacions cal fer per arribar-hi a partir de la matriu inicial i, en la majoria d'ocasions, algun alumne ho acaba descobrint. És després quan fem aparèixer el procés algèbric del producte de matrius, un cop treballat el problema dels ponts.

Per a l'alumnat del batxillerat social, resulta més assequible aquest procediment, ja que la definició de producte com a aplicació lineal resultant de la composició de dues altres aplicacions lineals habitualment els resulta molt poc engrescador. Fins i tot es poden proporcionar enllaços[6] a pàgines en les quals es pot «practicar» el recorregut proposat al problema dels ponts i altres situacions derivades, relaxant així la tensió habitual en una matèria com les matemàtiques.

## 7. Conclusions

A partir de les diferents experiències dutes a terme en diferents grups (projecte Estalmat, 2n de batxillerat, curs de matemàtiques 1r d'Enginyeria, màster de formació del professorat) s'ha pogut apreciar la riquesa de conceptes i procediments que es poden treballar a partir del problema dels ponts de Köningsberg. En aquest treball hem intentat apuntar, tot i que de manera molt resumida, aquells aspectes que es poden dur a l'aula. També hem procurat parar més atenció en aquells aspectes que creiem que poden ser de més interès pel nostre alumnat: el raonament del propi Euler, la representació mitjançant un graf d'una situació concreta, la matriu associada amb una graf i la relació entre el producte de matrius i els camins de segon ordre.

6. *La aventura del saber* (RTVE). Capítulo 6 Euler [revisat: 19/07/2013]
http://www.rtve.es/aventura/universo-matematico/webcap6/index.html
Proyecto Descartes 2D. Materiales didácticos. Bloque taller de matemáticas: Los puentes de Köningsberg: [revisat 19/07/2013]
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/rompecabezas/PuentesKoningsberg.htm

Els resultats que s'obtenen amb aquest material sorprenen per la bona acceptació per part de l'alumnat i per les grans possibilitats que els obre davant d'altres situacions que li puguem plantejar, augmentant clarament el seu interès per les matemàtiques en general.

## Bibliografia

Biggs, N., Lloyd, E., Wilson, R. (1986). *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford: University Press.

Castrillón, M. (2009). Grafos y algunas amenidades topológicas. Dins A. Pérez i M. Sánchez (coord.), *Matemáticas para estimular el talento: actividades del proyecto Estalmat* (p. 19-34). Sevilla (Espanya): Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128-140.

URL: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf (revisat: 19/07/2013).

Fornals, P., López, M. (2013). Pero, ¿por qué nos complicamos tanto para enseñar cómo multiplicar dos matrices? Una aproximación a partir del problema de los puentes de Köningsberg. Dins *Actas XVI Jornada para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*. Palma. (Pendent de publicació).

Hopkins, B., Wilson, R. J. (2004). The Truth About Königsberg. *The College Mathematics Journal*, 35, pp. 198-207.

URL: http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Polya/hopkins.pdf (revisat: 23/12/2013).

### Recursos web

Ticó, T. (2000). Passeig matemàtic per Catalunya. Llicència retribuïda curs 1999-2000. URL: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/199900/resums/ttico.html (revisat: 19/07/2013).