

Aplicacions de la teoria d'ondetes: Eliminació del soroll

MARÍA JOSÉ GONZÁLEZ FUENTES

L'objectiu d'aquest article és descriure com les tècniques d'ondetes poden ajudar a resoldre nombrosos problemes en el camp del processament del senyal. Ens centrarem principalment en els relacionats amb l'eliminació de soroll.

Una revisió excel·lent dels fonaments matemàtics sobre els quals recolza la teoria d'ondetes, així com el seu desenvolupament històric, es pot trobar en [1]. Tanmateix, i amb l'objectiu que aquest article sigui autocontingut, els recordarem de manera breu i concisa, insistint sobretot en les propietats de localització temps-freqüència de les bases d'ondetes. Per no obscurir les idees amb massa detalls i obtenir una major claredat, sacrificarem el rigor matemàtic, i tractarem d'explicar els resultats d'una forma simple. Tot i que aquesta exposició és lluny de ser completa tant en el contingut matemàtic com en la cobertura de les aplicacions, esperem que es pugui apreciar el potencial de l'anàlisi en ondetes. En la bibliografia hem seleccionat algunes de les publicacions sobre el tema, entre les quals destaquem els textos [6] i [1], aquest últim de caire divulgatiu.

Aquest article consta de tres apartats: en el primer es revisen els desenvolupaments en sèrie de Fourier de funcions periòdiques, i s'analitzen tant les aplicacions com les limitacions. A continuació s'introdueix el pla temps-freqüència i els diferents recobriments en funció de les bases que s'utilitzin com a sistemes de representació, i és posa de manifest la gran flexibilitat de les bases d'ondetes. Finalment es presenta un algorisme per eliminar soroll i els resultats obtinguts en aplicar-ho a dos registres sísmics amb diferents nivells de soroll.

1 Representació freqüencial

La història comença el 1807, quan Fourier afirma que tota funció periòdica pot ser representada de forma única com una sèrie de sinus i cosinus.

Recordem que la sèrie de Fourier associada a una funció periòdica de període 1 ve donada per

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}.$$

Com que $e^{2\pi i n t} = \cos 2\pi n t + i \sin 2\pi n t$, l'expressió anterior és equivalent a:

$$f(t) \sim a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t).$$

Aquesta idea té un gran impacte tant en el camp de l'anàlisi matemàtica, com en la física i l'enginyeria, i es van necessitar més de cent cinquanta anys per comprendre la convergència de les sèries de Fourier i establir en quin sentit les expressions anteriors representen identitats.

Sense profunditzar en qüestions de convergència, la descomposició de Fourier, expressada en el llenguatge de l'àlgebra lineal, indica que les funcions $e_n = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$ constitueixen una *base* de les funcions 1-periòdiques.

Examinem per un moment el concepte de base. Tot vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és una combinació dels vectors $(1, 0)$ i $(0, 1)$ o bé d'aquests altres vectors $(1, 1)$ i $(1, -1)$. Les combinacions lineals d'aquestes parelles generen tots els vectors del pla i a més la seva representació és única. De fet, qualsevol parell de vectors en diferents direccions forma una base de \mathbb{R}^2 , però les *millors bases* tenen una propietat extra: els seus vectors són perpendiculars, és a dir, el seu producte escalar és nul. D'aquesta propietat se n'extreuen dos avantatges:

- (i) El càlcul dels coeficients respecte a una base ortogonal és molt simple: si $u \in \mathbb{R}^2$ i e_1, e_2 són dos vectors ortogonals de llargària 1, és immediat observar que si $u = a_1 e_1 + a_2 e_2$ aleshores a_i és el producte escalar $\langle u, e_i \rangle$, $i = 1, 2$.
- (ii) El teorema de Pitàgores permet calcular l'energia o norma del vector u a partir dels seus coeficients, mitjançant la fórmula

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^2 |a_i|^2.$$

És útil i convenient, des del punt de vista intuïtiu, interpretar el producte escalar de dos vectors com una mesura de la correlació o semblança entre aquests. Així doncs, la perpendicularitat correspon a correlació nul·la i el coeficient $a_i = \langle u, e_i \rangle$ indica el pes de l'element base e_i en la dada o vector u que estem analitzant.

En el context de les sèries de Fourier, els nostres vectors són funcions 1-periòdiques d'energia o mesura finita. En aquest espai de funcions, que es denota per $L^2[0, 1] = \{f : \|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2 < \infty\}$, la correlació entre f i $g \in L^2[0, 1]$ ve donada per l'expressió:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

És fàcil comprovar que els vectors $e_n = e^{2\pi int}$ són ortogonals entre si, de norma 1 i que els coeficients de Fourier c_n s'obtenen calculant el producte escalar:

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt.$$

Tenim a més la identitat de Parseval, que estableix que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

que equival al teorema de Pitàgores a \mathbb{R}^2 .

En termes físics, cada element $e_n = e^{2\pi int}$ de la base representa una freqüència. Aquesta augmenta a mesura que n augmenta. Pensem per això, en el gràfic de les funcions $\sin 2\pi t$ o $\sin 100\pi t$. La segona conté moltes més oscil·lacions que la primera en el mateix interval de temps. La magnitud del coeficient c_n , o sigui $|c_n|$, mesura la importància que la freqüència n té en el senyal $f(t)$. Tenim, per tant, dues maneres de representar la informació:

- (i) En el domini temporal, indiquem què passa en cada instant de temps t . Aquesta informació ve donada per $f(t)$.
- (ii) En el domini freqüencial, indicant el contingut de cada freqüència. Aquesta informació ve donada per la successió (c_n) .

L'elecció entre aquestes dues per representar la informació dependrà del problema a estudiar. No oblidem que cadascuna determina l'altra. El principi subjacent en aquesta equivalència és similar al que hi ha en el canvi de base d'àlgebra lineal.

Examinem a continuació diferents aplicacions d'aquesta representació freqüencial, així com algunes de les seves limitacions.

1.1 Emmatzament i transmissió de dades

Suposem que desitgem comprimir i emmagatzemar un determinat senyal $f(t)$, $t \in [0, 1]$. La descomposició de Fourier permet substituir la dada contínua o analògica $f(t)$ per una successió discreta $(c_n)_n$ sense pèrdua d'informació. A més, com que $\sum |c_n|^2 < \infty$, les cues de la sèrie convergeixen cap a 0. Per tant emmagatzemant un nombre finit de coeficients (c_n) obtenim aproximacions de f arbitràriament precises.

Considerem ara un nou senyal g obtingut al pertorbar lleugerament l'anterior, en el sentit que tots dos coincideixen en gran part del registre. L'ideal seria que aquesta petita pertorbació del senyal original afectés només un petit nombre dels coeficients originals. D'aquesta forma, emmagatzemar o transmetre les dades de g només representaria variar una quantitat petita dels coeficients de f . Això no és així, ja que

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt.$$

Cada coeficient c_n involucra la informació de f en tot instant t , de manera que qualsevol canvi en el registre afecta la totalitat dels coeficients. En aquest sentit, emmagatzemar o transmetre senyals a través dels coeficients de Fourier resulta computacionalment poc eficient.

1.2 Regularitat i aproximacions de funcions

Nombrosos teoremes d'anàlisi harmònica quantifiquen la relació que existeix entre la regularitat d'una funció i el decaïment dels seus coeficients de Fourier, és a dir la velocitat a la que tendeixen cap a zero. La regularitat d'una funció pot ser mesurada pel nombre de vegades que és diferenciable, més diferenciabletat implica una velocitat més gran de decaïment dels coeficients i viceversa. Aquests resultats en el llenguatge d'aproximació de funcions, indiquen l'habilitat de la base de Fourier per aproximar un senyal amb pocs dels seus coeficients. L'error comès a l'aproximar $f(t)$ per la suma parcial $f_M(t) = \sum_{|n|=0}^M c_n e^{2\pi i n t}$ ve donat per

$$\mathcal{E}(M) = \|f - f_M\|^2 = \sum_{|n|>M} |c_n|^2,$$

que tendeix a 0 perquè la sèrie convergeix. Però l'aproximació serà veritablement eficient només si $\mathcal{E}(M)$ decau ràpidament quan M augmenta. Aquest decaïment és més ràpid quant més regular o suau és $f(t)$.

Aquest tipus de resultats involucren la regularitat *global* de la funció, que de fet depèn del seu comportament més singular. Per exemple, la funció indicadora $\mathbb{E}_{[1/4, 1/2]}(t)$, $0 < t < 1$, es considera discontinua, tot i que és constant i per tant infinitament diferenciable en quasi tot el seu registre. Els seus coeficients de Fourier es comporten com els d'una funció discontinua, que decauen típicament com $1/n$. La barreja global de la informació que proporciona la representació de Fourier no permet inferir, a partir dels coeficients, que es tracta d'una funció constant tret de dos punts on és discontinua. La base de Fourier no està, per tant, ben adaptada a l'estudi de les regularitats locals i singularitats, i tampoc no proporciona un sistema de representació eficaç per aproximar aquest tipus de funcions.

1.3 Invariància per translacions

Un resultat clau en la teoria de l'anàlisi de Fourier és que les ones sinusoidals $e^{2\pi i n t}$ són les autofuncions dels operadors L invariants per translacions: translacions del senyal f provoquen translacions de l'efecte Lf . Expressat d'una altra forma: la base de Fourier diagonalitza els operadors invariants per translacions. Tots coneixem per àlgebra lineal el gran avantatge que suposa representar les dades en aquesta base. Si L denota un d'aquests operadors i f és l'*input* o senyal d'entrada, l'*output* o senyal de sortida Lf es pot expressar directament a partir dels autovalors (a_n) . Més concretament, si (c_n) són els coeficients de Fourier de f , llavors $(a_n \cdot c_n)$ són els coeficients de Lf . Per tant

L'operador L amplifica o atenua els components freqüencials de f d'acord amb els autovalors de L .

Una motivació bàsica que és a l'arrel de les transformades és la idea que alguns tipus de processament són millors, i de vegades només s'aconsegueixen en un domini que no és el del senyal original. En aquest sentit la utilitat d'una transformada es mesura per la seva habilitat per facilitar tasques de processament per via d'algorismes.

Els algorismes dissenyats per a analitzar o processar un senyal es basen en models matemàtics en els quals fem encabir el tipus de dades que ens interessa estudiar. Aquests models poden tenir una formulació determinística o estocàstica. El seu objectiu, en tot cas, és capturar les característiques més importants dels senyals de la forma més exacta possible. Molts d'aquests models del processament del senyal tradicional tenen el seu origen en la teoria dels sistemes invariants per translacions. Per exemple, els processos estacionaris es caracteritzen perquè les seves propietats estadístiques es mantenen sota translacions adients en el temps. En aquest context, la transformada de Fourier juga un paper fonamental en la manipulació d'aquesta classe de processos. Tanmateix, en la realitat existeixen molts senyals amb característiques totalment diferents, essent el seu tret fonamental, no la invariància per translacions, sinó per canvis d'escala. En els cas estocàstic, significa que les estadístiques del procés no canvien quan contraïem o dilatem l'eix temporal. El comportament en aquests períodes de temps és el mateix que a llarg termini. Aquest comportament fractal requereix tècniques diferents per detectar, identificar, clarificar i estimar aquest tipus de senyals.

1.4 Eliminació de soroll

El soroll dels senyals i els sistemes és, per definició, no desitjat i problemàtic. Malauradament és inevitable en les aplicacions reals. Un dels procediments utilitzats freqüentment per extreure el soroll està basat en la descomposició de Fourier, i consisteix en l'aplicació de filtres lineals que atenuen o anul·len els components de freqüència alta. Si denotem per $Z(t)$ el registre sorollós i suposem que el soroll és additiu, podem expressar $Z(t)$ com a suma del senyal $X(t)$ i del soroll $W(t)$ que pretenem eliminar. En el domini freqüencial, els coeficients de Fourier (c_n) de $Z(t)$ són aleshores la suma dels coeficients corresponents de $X(t)$ i de $W(t)$. Si sabem a priori que $X(t)$ és un senyal suau, o sigui, que canvia lentament, els seus coeficients de Fourier decauran ràpidament, fet pel qual la seva contribució en les freqüències altes serà quasi nul·la. Al contrari, el soroll es caracteritza per les seves ràpides oscil·lacions, i provoca coeficients de magnitud més gran en les freqüències altes. És a dir, si h és suficientment gran, $|c_n|$ depèn en la seva quasi totalitat del nivell de soroll. Per tant, un possible mètode per obtenir un senyal net de soroll consisteix a eliminar els coeficients (c_n) superiors a una determinada freqüència N_0 , o expressat en el llenguatge del processament del senyal, a aplicar un filtre passa baixa a les dades $Z(t)$. El senyal net $X(t)$ es pot recuperar aleshores a partir

dels coeficients no nuls, mitjançant la sèrie de Fourier:

$$X(t) \sim \sum_{|n| \leq N_0} c_n e^{2\pi i n t}.$$

Un problema que es planteja en nombroses ocasions és que els senyals que ens interessin no són suaus, com en el cas dels senyals sísmics. A l'anular les freqüències altes, hi ha el risc d'eliminar justament la informació que pretenem analitzar, com pot ser l'arribada del terratrèmol.

En resum, la representació de Fourier indica el contingut freqüencial d'un procés o senyal, però no proporciona informació sobre la localització d'aquestes freqüències. La seva principal limitació és deguda al fet que la informació que proporciona és global; no és un bon diccionari per analitzar comportaments locals.

2 Anàlisi temps-freqüència

Amb el fi de comprendre els avantatges que aporta la transformada en ondata profunditzarem una mica més en el terme *localització temps-freqüència*, ja que aquesta propietat de les ondets determinarà les característiques rellevants que es poden extreure del senyal.

Considerem un senyal discret compost per N dades que representarem per un vector $z = (z(0), \dots, z(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. Direm que Z està localitzat en un instant n_0 , si tots els components $z(n)$ de z són 0 o almenys relativament petits, tret d'uns pocs valors de n pròxims a n_0 .

Suposem que $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_{N-1}\}$ és una base de \mathbb{C}^N , on cada element de v_i està localitzat en algun instant de temps. Donat $z \in \mathbb{C}^N$ podem expressar z com la combinació lineal:

$$z = \sum_0^{N-1} \alpha_i v_i,$$

amb $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, N-1$.

Centrem ara la nostra atenció en la part del senyal z que correspon a instants propers a n_0 . Els trams de la combinació lineal que involucren vectors base que són nuls, o quasi nuls, prop de n_0 poden ser eliminats sense que canviï significativament el comportament de z al voltant de l'instant n_0 . Podem, per tant, reemplaçar la suma que involucra N termes per una altra de molt més petita si considerem únicament la porció de z propera a n_0 .

De forma més general, una base localitzada és útil perquè permet analitzar localment el senyal: si un determinat coeficient en l'expansió de z és gran, podem identificar la localització a la qual està associat aquest coeficient. Això ens permet enfocar en aquesta localització concreta i analitzar aquí el senyal amb més detall.

La seva utilitat en la transmissió de senyals és també evident: per transmetre un senyal que es diferencia d'un altre, no és necessari enviar el nou senyal,

sinó només els canvis. En una base localitzada, els coeficients dels vectors base concentrats lluny del canvi resten pràcticament invariants. Això no es pot aconseguir utilitzant la base de Fourier o, donat que es tracta de dades discretes, la base de Fourier discreta, ja que en aquest cas els coeficients de Fourier s'obtenen mitjançant la correlació de z amb les ones sinusoidals $e^{2\pi imt}$ avaluades en els instants $t = 0, \dots, (N-1)/N$, on $m = 0, \dots, N-1$. Tenim aleshores que

$$c_m = \langle z, v_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi mn/N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

on $v_m(n) = e^{2\pi imn/N}$. Observem que la base de Fourier (v_0, \dots, v_{N-1}) no està localitzada en el temps, ja que $|v_m(n)| = 1$ per a tot n . Un canvi en $z(n)$ per a un únic valor de n afecta tots els coeficients (c_m) significativament.

Per una altra part, la base euclidiana està perfectament localitzada en el temps, però no en freqüència, i per tant no té els avantatges de la base de Fourier. Una base localitzada en freqüència ens permet copiar les tècniques de filtratge, com per exemple eliminar els coeficients que corresponen a vectors base localitzats en altes freqüències, si sabem que aquests són produïts per soroll que afecta el senyal.

Freqüències que varien en el temps són freqüents en música, parla, senyals sísmics, etc. Per estudiar aquests processos és necessari trobar representacions que permetin analitzar el contingut freqüencial localment en el temps o, equivalentment, construir bases amb elements localitzats en el temps i en freqüència. Existeixen essencialment dos mètodes que s'han desenvolupat amb aquest propòsit: la transformada de Fourier per finestres (WFT) i la transformada ondeta.

La WFT és l'alternativa clàssica quan s'estudia l'evolució temporal de l'espectre de freqüències. Es basa en la utilització de la transformada de Fourier en finestres de llargària fixa. Un inconvenient és que la partició del senyal en finestres tendeix a produir errors artificials en les seves barreres. Un altre inconvenient és la pèrdua de resolució temporal en freqüències més grans que les que corresponen a la llargària de la finestra. Augmentant la llargària de la finestra s'aconsegueix més precisió en les baixes freqüències, i aplicant finestres més petites es guanya precisió temporal, però no és detecten les freqüències més baixes. Una possible solució seria utilitzar finestres de llargària variable en funció de la freqüència analitzada. Les finestres corresponents a les baixes freqüències seran grans i captaran mitjanes globals del senyal, característiques globals a gran escala, i a mesura que disminueixen de mida captaran les variacions locals, petits detalls a petita escala, actuant com un microscopi matemàtic. La transformada en ondeta es basa en aquesta idea.

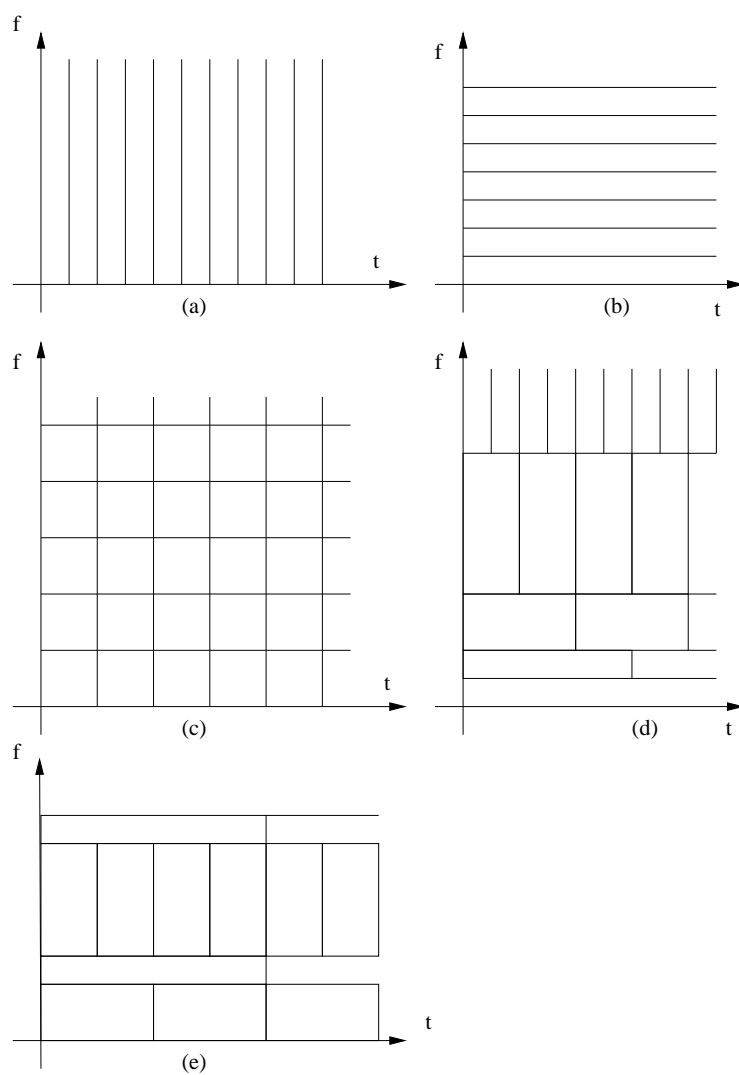


FIGURA 1: Representació temps-freqüència corresponent a: (a) Base euclidiana, (b) Base de Fourier, (c) WFT, (d) Base d'ondetes (e) Paquets d'ondetes.

La representació en el pla temps-freqüència de les diferents bases mencionades: euclidiana, Fourier, Fourier amb finestres i ondetes, il·lustra perfectament les diferents opcions de localització temps-freqüència que ofereix cadascuna (vegeu la figura 1). La base euclidiana correspon a caixes verticals, perfectament localitzades en el temps i sense cap localització en la freqüència. Les ones sinusoidals que formen la base de Fourier ocupen tot l'eix temporal però tenen perfecta localització freqüencial. Corresponen, per tant, a caixes horitzontals. La WFT dóna lloc a finestres de la mateixa mida desplaçades verticalment i horitzontalment. Per últim, la base d'ondetes descomposa l'eix de les freqüències en intervals de mida creixent exponencialment. Cada interval de freqüència està cobert per caixes traslladades uniformement al llarg de l'eix temporal.

Alternativament es poden considerar d'altres recobriments utilitzant els anomenats paquets d'ondetes, sense oblidar la restricció que suposa el principi d'incertesa de Heisenberg, que estableix que una funció no pot estar localitzada simultàniament en el temps i en la freqüència. Per tant, els blocs que recobreixen el pla temps-freqüència han de tenir una àrea mínima.

S'utilitza el terme ondetes perquè els elements de la base d'ondetes són ones pel seu caràcter oscil·latori, la seva integral és nul·la; i petites perquè o bé tenen suport compacte o bé decauen ràpidament. Els elements de la base d'ondetes són versions traslladades i escalades d'una funció principal $\Psi(t)$ anomenada mare ondetes i s'expressen com

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

on els paràmetres j i k representen escala i posició respectivament. Convé mencionar en aquest punt, sense entrar en detalls i definicions, que en el context de les ondetes, a l'igual del cas de Fourier, existeix també una transformada en ondetes contínua $\Psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$, $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}$, i una transformada en ondetes discreta que permet analitzar dades discretes. Aquesta última involucra a més de la funció ondetes mare $\Psi(t)$ una funció $\Phi(t)$ anomenada pare ondetes o funció d'escala.

Traslladar l'ondetes equival a desplaçar la finestra en el pla temps-freqüència. La base i l'alçada de la finestra corresponen respectivament al suport temporal i freqüencial de Ψ . En canviar d'escala, la base de la finestra es redueix per un factor 2^{-j} i l'alçada augmenta per 2^j . El pla temps-freqüència es pot entendre, doncs, com a temps-escala, essent l'escala proporcional a l'invers de la freqüència.

El procés de càlcul de la transformada en ondetes és anàleg al cas de Fourier: els blocs elementals o *àtoms* en els quals descomponem el senyal no són ara ones sinusoidals, sinó les ondetes $\Psi_{j,k}$. Aquestes formen una base ortonormal, i per tant els coeficients associats $c_{j,k}$ s'obtenen trobant la correlació del senyal amb l'element $\Psi_{j,k}$. Com que aquesta mesura la semblança entre totes dues funcions, la magnitud de $c_{j,k}$ mesura la contribució de les freqüències associades a la finestra $\Psi_{j,k}$ en l'interval de temps que suporta la finestra. O expressat d'una altra manera: les funcions ondetes actuen com a filtres, i

deixen únicament les freqüències del senyal equivalents a la freqüència que correspon a l'escala de l'ondeta.

L'elecció de la funció ondeta depèn de diversos factors: la resolució temps-freqüència; si Ψ té suport compacte, la seva resolució temporal serà bona, però tindrà una resolució freqüencial menor que una ondeta amb suport compacte en el domini de la freqüència. Un altre factor important és la quantitat de moments nuls: el moment k -èssim es defineix com $\int t^k \Psi(t) dt$. Els moments nuls determinen el que l'ondeta *no veu*. Un moment nul indica que l'ondeta no veu funcions lineals; dos moments nuls, que no veu polinomis quadràtics, etc. L'efecte pràctic d'això és concentrar la informació en una petita quantitat de coeficients. Això és útil, entre d'altres aplicacions, per a comprimir dades, analitzar senyals amb singularitats o, com veurem a continuació, per a eliminar soroll.

3 Eliminació de soroll

El primer problema que es planteja es decidir què és senyal i què és soroll. El mètode que descriurem a continuació es basa en el principi fonamental següent: el soroll és la part del senyal a la qual manca estructura o *coherència*, coherència respecte a unes funcions base o àtoms que serveixen de sistema de referència. Des d'aquest punt de vista, el producte escalar entès com a correlació permet definir la línia que separa el soroll (incoherència) i el senyal (coherència). Així, la informació o energia d'un senyal incoherent es dissipa uniformement a través dels elements de la base del sistema de representació, mentre que el senyal coherent es concentra en uns quants d'aquests elements.

L'objectiu és trobar una base que transforma el senyal en uns quants coeficients de mida gran més que un resta. La millor base serà aquella que sigui capaç de concentrar la informació del senyal en la menor quantitat possible de coeficients. Així gran part del soroll es pot suprimir fàcilment eliminant aquests coeficients que són petits, en el sentit que estan per sota d'un llindar T , que hem de determinar.

Considerem el model següent

$$Z[n] = f[n] + W[n]; \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

on Z representa el registre sorollós, f el senyal a tractar i W el soroll. Suposem que el soroll és blanc, és a dir, W és un procés gaussià format per variables aleatòries independents $W[n]$, cadascuna amb distribució normal $N(0, \sigma^2)$.

La descomposició del senyal en una base ortonormal $\mathcal{B} = \{g_m\}_m; 0 \leq m \leq N - 1$ dona lloc a coeficients:

$$\langle Z, g_m \rangle = \langle f, g_m \rangle + \langle W, g_m \rangle.$$

Es pot demostrar que els coeficients de soroll $\langle W, g_m \rangle$ són també variables aleatòries gaussianes independents de variances σ^2 .

Si Z únicament conté soroll, i. e. $Z = W$, teoremes estadístics demostren que amb una gran probabilitat $|\langle W, g_m \rangle| \leq \sigma\sqrt{2 \log N}$. Utilitzant aquest fet podem definir el llindar $T = \sigma\sqrt{2 \log N}$, i obtenim un estimador del senyal f , \hat{f} , mantenint els coeficients situats per sobre del llindar T i eliminant la resta. És a dir,

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n g_n, \quad \text{on } b_n = \begin{cases} \langle Z, g_n \rangle & \text{si } |\langle Z, g_n \rangle| > T \\ 0 & \text{si } |\langle Z, g_n \rangle| \leq T. \end{cases}$$

En principi σ és un paràmetre desconegut. Es pot obtenir $\hat{\sigma}$ a partir dels coeficients d'ondeta que corresponen a les freqüències altes. Un mètode que evita calcular $\hat{\sigma}$ consisteix a extreure progressivament les estructures coherents, és a dir, els vectors base que tenen una correlació més gran amb les dades Z . L'algorisme es basa en l'observació següent: si $W[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$ és soroll blanc, $E[\|w\|^2] = \sigma^2 N$ i amb probabilitat elevada

$$\frac{\max_m |\langle W, g_m \rangle|^2}{E[\|w\|^2]} \leq \frac{\sigma^2 2 \log N}{\sigma^2 N} = \frac{2 \log N}{N} = T_N^2.$$

Un senyal g serà interpretat com un soroll si la seva correlació amb els vectors del diccionari no és millor que la d'un soroll blanc, és a dir, si:

$$\sup_m \frac{|\langle g, g_m \rangle|^2}{\|g\|^2} \leq T_N^2.$$

Utilitzant aquesta idea es pot dissenyar un algorisme que permet extreure progressivament les estructures coherents [6, p. 465]. Consta de tres etapes:

- (i) Ordenem els coeficients segons la seva mida de forma decreixent:

$$|\langle Z, g_{m_0} \rangle| \geq |\langle Z, g_{m_1} \rangle| \geq \dots$$

- (ii) El senyal Z no es considera únicament soroll si

$$\frac{|\langle Z, g_{m_0} \rangle|^2}{\|Z\|^2} > T_N^2.$$

En aquest cas, g_{m_0} és una estructura coherent.

- (iii) Si extraïem l'estructura coherent g_{m_0} , s'obté un nou senyal

$$Z_1 = Z - \langle Z, g_{m_0} \rangle g_{m_0}$$

que pertany a l'espai de dimensió $N - 1$. Per decidir si és o no soroll, es compara de nou amb el soroll blanc, però de mida $N - 1$. Així doncs, Z_1 no és soroll i g_{m_1} és una estructura coherent si

$$\frac{|\langle Z, g_{m_1} \rangle|^2}{\|Z\|^2} > T_{N-1}^2.$$

El procés finalitza quan apareix el primer índex M pel qual Z_M és soroll. L'estimador \hat{f} del senyal s'obté a partir de les estructures coherents $g_{m_0}, \dots, g_{m_{M-1}}$:

$$\hat{f} = \sum_{k=0}^{M-1} \langle f, g_{m_k} \rangle g_{m_k}.$$

En la figura 2 es mostren els resultats obtinguts en [8] a l'aplicar un mètode similar a dos terratrèmols, amb un nivell de soroll alt i baix respectivament. Observem que en el segon cas el senyal filtrat és molt similar a l'original.

Aquest algorisme és eficient únicament si el sistema de representació \mathcal{B} que escollim està ben adaptat al senyal, en el sentit mencionat anteriorment: l'energia es concentra en pocs coeficients. Per exemple, el senyal $f[n] = e^{i\zeta n}$ serà interpretat com soroll en la base euclidiana, ja que

$$\sup |f(m)|^2 \|f\|^2 = 1/N \leq T_N^2.$$

En aquest cas, la base euclidiana no és una base ben adaptada a les dades.

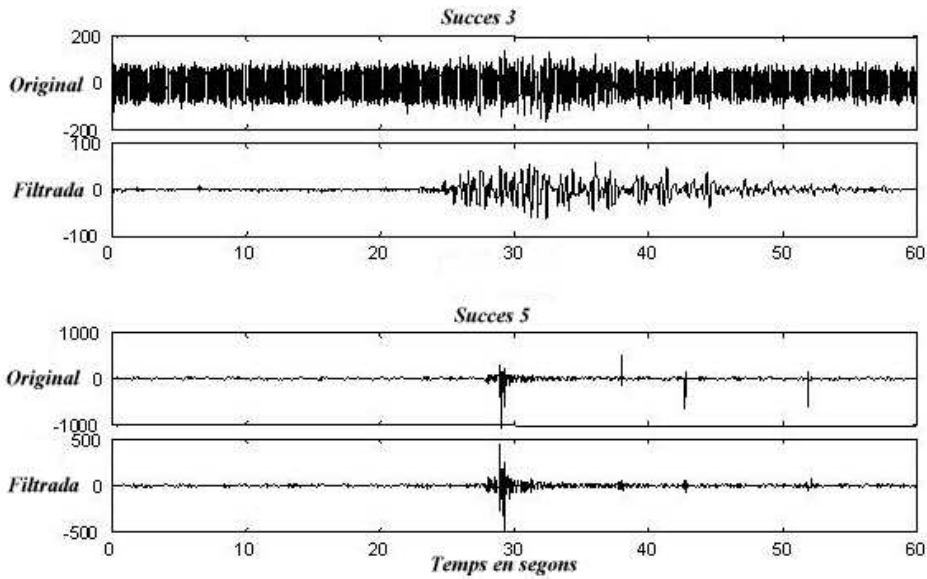


FIGURA 2: Terratrèmol local de magnitud 2.2 registrat per l'estació MONI i un altre terratrèmol local de magnitud 1,7 registrat per l'estació REAL. Tots dos localitzats a Andalusia.

La connexió entre el problema d'eliminar soroll i la teoria de l'aproximació no lineal de funcions és clara. En les aproximacions no lineals, el senyal no es projecta sobre M vectors seleccionats a priori, sinó que aquests són escollits depenent de les propietats del senyal. Per optimitzar l'aproximació es pot adaptar l'elecció de la base a les característiques del senyal.

La important contribució de les bases d'ondetes a aquests problemes rau en la seva gran habilitat per aproximar, eficientment, senyals que pertanyen a una classe d'espais de funcions molt ample, utilitzant pocs vectors. L'escala actua com un microscopi matemàtic que detecta detalls cada cop més fins, el procediment d'aproximació no lineal equival a construir una xarxa irregular de mostratge adaptada a les variances locals del senyal.

Quan es tracta d'estudiar senyals complexos com els obtinguts en una gravació musical, no existeix pràcticament cap ondetes que generi una base ben adaptada al senyal. En aquests casos, la idea és ampliar el diccionari de possibles estructures coherents. En lloc de considerar una única base, es considera un diccionari de bases ortogonals $\mathcal{D} = \cup_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$, obtingut a partir de diversos recobriments del pla temps-freqüència. En aquests paquets d'ondetes es tria la millor base mitjançant algorismes que minimitzen una funció, anomenada *funció de cost*.

Els paquets d'ondetes introdueixen noves famílies d'àtoms temps-freqüència, aquest diccionari d'àtoms pot ser ampliat si hom no imposa la limitació d'ortogonalitat (i independència), fet que dona lloc a diccionaris redundants. La idea nova és, aleshores, redefinir els conceptes de soroll i d'estructures coherents [4].

El procediment per eliminar el soroll és similar al descrit anteriorment: els elements del diccionari seleccionats en les iteracions inicials de l'algorisme corresponen a estructures coherents del senyal i la cua de l'expansió al soroll. De nou, l'eficàcia d'aquest mètode es basa en la possibilitat de construir representacions compactes de senyals complexos, descomponent el senyal en àtoms temps-freqüència d'un diccionari adaptat a l'estructura temps-freqüència del senyal. Aquesta és la gran contribució de les ondetes.

Referències

- [1] BRUNA, J. «Representació i mostratge de funcions: de la serie de Fourier a la teoria d'ondetes». *Bul. de la Soc. Catalana de Matemàtiques*, 14 (1999), 31-61.
- [2] BURKE, B. *The world according to Wavelets: the story of a mathematical technique in the making*. A. K. Peters LTD (1998).
- [3] DONOHO, D.; JOHNSTONE, I. «Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage». *Biometrika*, 81 (1994), 425-455.
- [4] DAVIS, G. M.; MALLAT, S.; AVELANEDO, M. «Greedy adaptative approximations». *J. of Constr. Approx.*, 13 (1997), 57-98.
- [5] HOLSCHNEIDER, M. *Wavelets: an analysis tool*. Oxford Mathematical Monographs (1998).
- [6] MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press (1998).
- [7] MEYER, Y. *Ondelettes et operateurs*. Hermann, París (1990).

- [8] PAZOS, A.; GONZÁLEZ, M. J.; ALGUACIL, G. *Non-linear filters, using the multiresolution analysis of the wavelet transform*. Preprint 2000.
- [9] STRAY G., NGUYEN T. *Wavelets and filter banks*. Wellsley-Cambridge Press (1997).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
APARTADO NÚM. 40
11510 PUERTO REAL, CÁDIZ